المستوى : السنة الثالثة إعدادي
الأستاذ : محمد العمراني

تمارين حول معادلة مستقيم

مادّة : الرّياضيّات

الثّانويّة الإعدادية لحسن اليوسي
السنة الدراسية : 2019-2020

في كلّ تمارين هذه السّلسلة $(O;I;J)$ عبارة عن معلم متعامد ممنظم.

التّمرين الأوّل :

نعتبر النّقط : $A(1;1)$، $B(2;-1)$، $C(0;-2)$ و $D(100;-197)$.

1) حدّد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB).

2) هل النّقطة D تنتمي للمستقيم (AB)؟ علّل جوابك.

3) هل النّقط A، B و C نقط مستقيميّة؟ علّل جوابك.

حلّ :

1) ليكن : $(AB) : y = ax + b$.

- لنحدّد a، ميل المستقيم (AB) :

نعلم أنّ : $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

إذن : $a = \dfrac{1-(-1)}{1-2} = \dfrac{2}{-1} = -2$

و بالتّالي : $(AB) : y = -2x + b$

- لنحدّد b، الأرتوب عند الأصل :

A نقطة تنتمي للمستقيم (AB)

إذن : $y_A = -2x_A + b$

أي : $1 = -2 \times 1 + b$

يعني : $1 = -2 + b$

و بالتّالي : $b = 1 + 2 = 3$

و منه فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)، هي : $(AB) : y = -2x + 3$.

2) إذا كانت النقطة D تنتمي للمستقيم (AB)، فيجب أن تحقّق إحداثياتها معادلته المختصرة.

يعني يجب أن تتحقّق المتساوية : $y_D = -2x_D + 3$.

لدينا : $-2x_D + 3 = -2 \times 100 + 3 = -200 + 3 = -197$

إذن : $y_D = -2x_D + 3$

و بالتّالي النّقطة D تنتمي للمستقيم (AB).

3) لنتحقّق هل النّقطة C تنتمي للمستقيم (AB)؟

لدينا : $-2x_C + 3 = -2 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3$

إذن : $y_C \neq -2x_C + 3$

و بالتّالي إحداثيّتا النّقطة C لا تحقّق المعادلة المختصرة للمستقيم (AB).

إذن : C لا تنتمي للمستقيم (AB)

و منه فإنّ A، B و C نقط غير مستقيميّة.

التّمرين الثّاني :

نعتبر المستقيمان (Δ) و (D) المعرّفان بمعادلتيهما المختصرتين كما يلي : $(\Delta) : y = \frac{2}{3}x - 1$ و $(D) : y = \frac{3}{2}x + 1$.

1) بيّن أنّ المستقيم (Δ) لا يوازي المستقيم (D).

2) حدّد حسابيّا إحداثيّتا K، نقطة تقاطع (Δ) و (D).

3) أنشئ في المعلم $(O; I; J)$ المستقيمان (Δ) و (D).

حلّ :

1) لدينا : $(\Delta) : y = \frac{2}{3}x - 1$

إذن ميل المستقيم (Δ)، هو العدد : $\frac{2}{3}$.

و لدينا : $(D) : y = \frac{3}{2}x + 1$

إذن ميل المستقيم (D)، هو العدد : $\frac{3}{2}$.

و بالتّالي ليس للمستقيمين (D) و (Δ) نفس الميل.

و منه فإنّ المستقيم (Δ) لا يوازي المستقيم (D).

2) لدينا : $(\Delta) : y = \frac{2}{3}x - 1$ و $(D) : y = \frac{3}{2}x + 1$.

إذن أفصول نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)، هو حل المعادلة : $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{3}{2}x + 1$.

لدينا : $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{3}{2}x + 1$

إذن : $\frac{4x - 6}{6} = \frac{9x + 6}{6}$

أي : $4x - 6 = 9x + 6$

يعني : $-6 - 6 = 9x - 4x$

إذن : $-12 = 5x$

أي : $\frac{-12}{5} = x$

و بالتّالي أفصول النّقطة K، هو : $x_K = \frac{-12}{5}$.

النّقطة K تنتمي للمستقيم (Δ).

إذن : $y_K = \frac{2}{3}x_K - 1$

أي : $y_K = \frac{2}{3} \times \left(\frac{-12}{5}\right) - 1 = \frac{-8}{5} - 1 = \frac{-8-5}{5} = \frac{-13}{5}$

و منه فإنّ النّقطة $K\left(\frac{-12}{5}; \frac{-13}{5}\right)$، هي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

3) - بالنّسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $(\Delta) : y = \frac{2}{3}x - 1$

إذا أخذنا $x = 3$ فإنّ : $y = \frac{2}{3} \times 3 - 1 = 2 - 1 = 1$

إذن النّقطة $A(3;1)$ تنتمي للمستقيم (Δ).

إذا أخذنا $x = -3$

فإنّ : $y = \frac{2}{3} \times (-3) - 1 = -2 - 1 = -3$

إذن النّقطة $B(-3;-3)$ تنتمي للمستقيم (Δ).

- بالنّسبة للمستقيم (D) :

لدينا : $(D) : y = \frac{3}{2}x + 1$

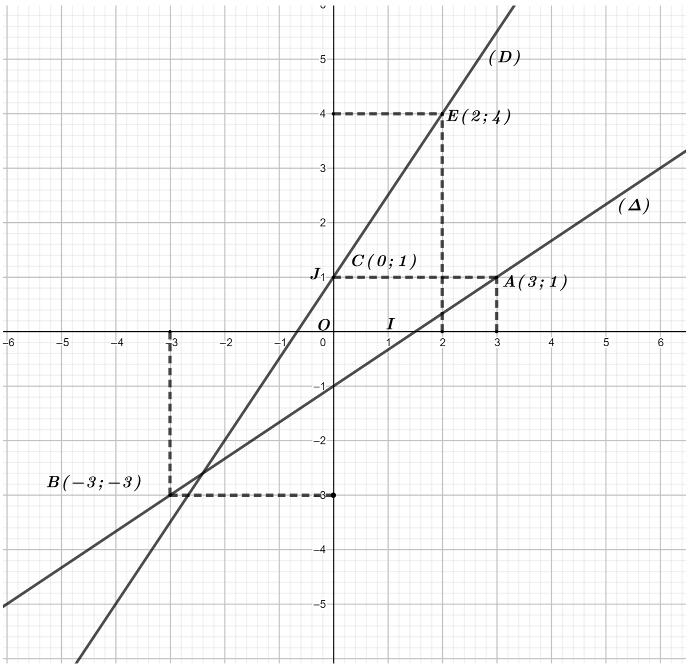
إذا أخذنا $x = 0$ فإنّ : $y = \frac{3}{2} \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

إذن النّقطة $C(0;1)$ تنتمي للمستقيم (D).

إذا أخذنا $x = 2$

فإنّ : $y = \frac{3}{2} \times 2 + 1 = 3 + 1 = 4$

إذن النّقطة $E(2;4)$ تنتمي للمستقيم (D).



الشّكل جانبه يوضّح إنشاء المستقيمين (Δ) و (D).

التّمرين الثّالث :

حدّد الوضع النّسبي للمستقيمين (D) و (L)، في كلّ حالة من الحالات التّاليّة :

1) $(D) : y = \frac{7}{3}x - 71$ و $(L) : y = \frac{7}{3}x + 1$.

2) $(D) : y = -3x + \frac{2}{5}$ و $(L) : y = \frac{1}{3}x - 2$.

3) $(D) : y = 4x - 5$ و $(L) : y = -7x + \frac{3}{7}$.

حلّ :

1) للمستقيمين (D) و (L) نفس الميل، و هو : $\frac{7}{3}$

إذن : $(D)//(L)$.

2) جداء ميلي المستقيمين (D) و (L)، هو : $-3 \times \frac{1}{3} = -1$

إذن : $(D) \perp (L)$.

3) ليس للمستقيمين (D) و (L) نفس الميل، إذن فهما ليسا متوازيان.
كما أنّ جداء ميليهما لا يساوي -1، إذن فهما ليسا متعامدان.
و بالتّالي المستقيمان (D) و (L) يتقاطعان في نقطة.

التّمرين الرّابع :

نعتبر المستقيم (Δ) المعرّف بالمعادلة المختصرة التّاليّة : $(\Delta) : y = -3x + 2$.

1) حدّد المعادلة المختصرة للمسقيم (D) المار من النّقطة $A(2;-1)$ و الموازي للمستقيم (Δ).

2) حدّد المعادلة المختصرة للمسقيم (L) المار من النّقطة $B(2;2)$ و العمودي على المستقيم (Δ).

حلّ :

1) نعتبر : $(D) : y = ax + b$.

- لنحدّد العدد a، ميل المستقيم (D) :
لدينا : $(D)//(\Delta)$ و $(\Delta) : y = -3x + 2$
إذن : $a = -3$ (لأن للمستقيمين (D) و (Δ) نفس الميل)
و بالتّالي : $(D) : y = -3x + b$.

- لنحدّد العدد b، الأفصول عند الأصل :
لدينا : $A(2;-1)$ تنتمي للمستقيم (D)
إذن : $y_A = -3x_A + b$
أي : $-1 = -3 \times 2 + b$
يعني : $-1 = -6 + b$
و منه فإن : $b = -1 + 6 = 5$
و بالتّالي المعادلة المختصرة للمستقيم (D)، هي : $(D) : y = -3x + 5$.

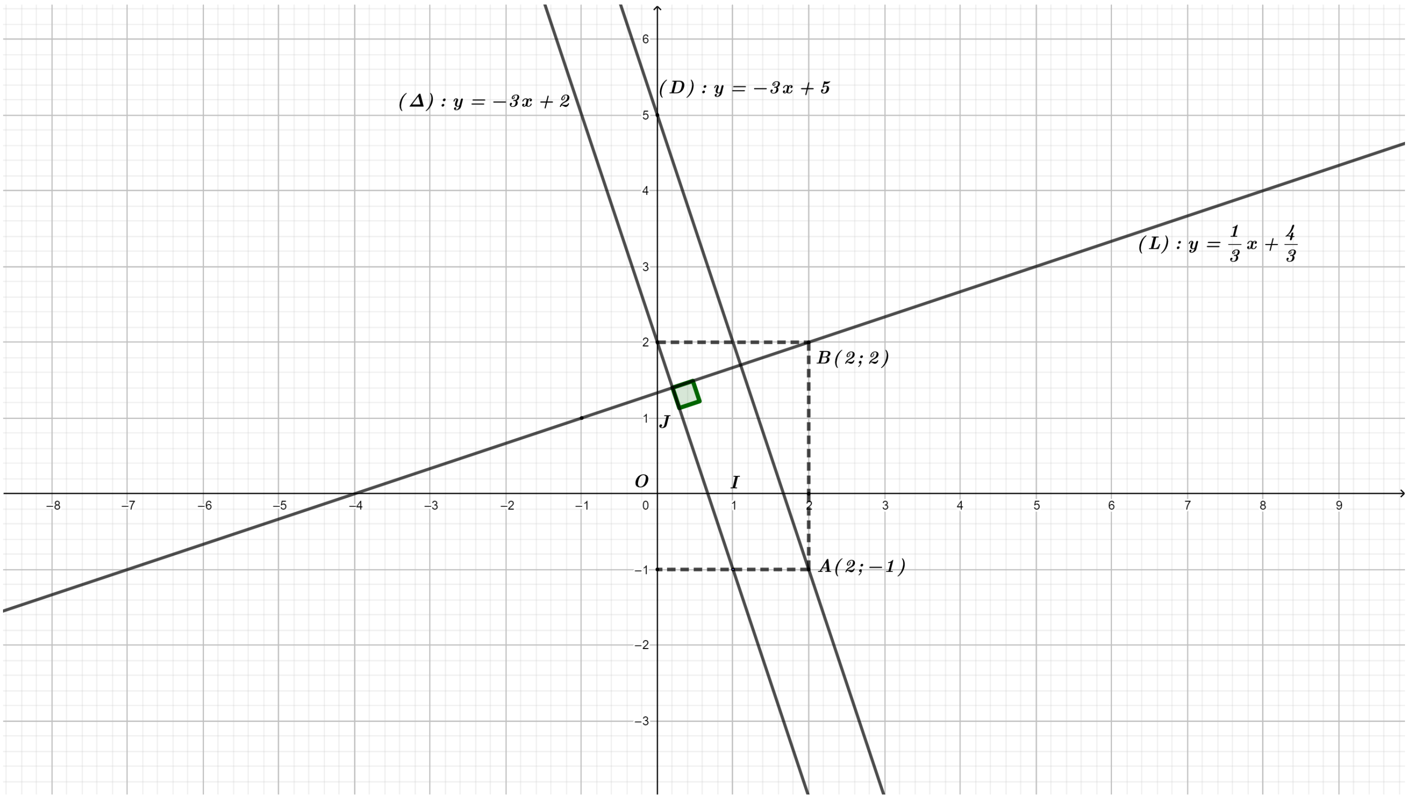
2) نعتبر : $(L) : y = mx + p$.

- لنحدّد العدد m، ميل المستقيم (L) :
لدينا : $(L)\perp(\Delta)$ و $(\Delta) : y = -3x + 2$
إذن : $m \times (-3) = -1$ (لأنّ جداء ميلي (L) و (Δ) هو -1)
أي : $m = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$
و بالتّالي : $(L) : y = \dfrac{1}{3}x + m$.

- لنحدّد العدد m، الأفصول عند الأصل :
لدينا : $B(2;2)$ تنتمي للمستقيم (L)
إذن : $y_B = \dfrac{1}{3}x_B + m$
أي : $2 = \dfrac{1}{3} \times 2 + m$
يعني : $2 = \dfrac{2}{3} + m$
و منه فإن : $m = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6-2}{3} = \dfrac{4}{3}$

و بالتّالي المعادلة المختصرة للمستقيم (L)، هي : $(L) : y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

الشّكل التّالي يوضّح إنشاء المستقيمات الثّلاث الواردة في هذا التّمرين :



التّمرين الخامس :

نعتبر النّقطتين $A(2;-3)$ و $B(1;2)$، حدّد المعادلة المختصرة لواسط القطعة $[AB]$.

حلّ :

بدايةً نذكّر أنّ واسط قطعة، هو عبارة عن مستقيم يمرّ من منتصفها و عمودي على حاملها.

بما أن : (Δ) واسط القطعة $[AB]$

فإنّ : (Δ) عمودي على المستقيم (AB)، و يمرّ من النّقطة $K(x_K;y_K)$ منتصف القطعة $[AB]$.

- لنحدّد إحداثيّتا النّقطة $K(x_K;y_K)$:

بما أن : K منتصف القطعة $[AB]$

فإنّ : $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

إذن : $x_K = \frac{2+1}{2}$ و $y_K = \frac{-3+2}{2}$

أي : $x_K = \frac{3}{2}$ و $y_K = \frac{-1}{2}$

و بالتّالي : $K\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$

- لنحدّد العدد a، ميل المستقيم (AB) :

لدينا : $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

إذن : $a = \frac{-3-2}{2-1} = \frac{-5}{1} = -5$.

لنحدّد الآن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ).

نعتبر أن : $(\Delta) : y = mx + p$.

- لنحدّد العدد m، ميل المستقيم (Δ) :

نعلم أن : $(\Delta)\perp(D)$

إذن : $m \times (-5) = -1$

أي : $m = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

و بالتّالي : $(\Delta) : y = \frac{1}{5}x + p$.

- لنحدّد العدد p، الأرتوب عند الأصل :

نعلم أن المستقيم (Δ) يمرّ من النقطة K

إذن : $y_K = \frac{1}{5}x_K + p$

أي : $-\frac{1}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} + p$

يعني : $-\frac{1}{2} = \frac{3}{10} + p$

و بالتّالي : $p = -\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{-5-3}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

أخيراً المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ)، واسط القطعة $[AB]$ ، هي : $(\Delta) : y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$.

التّمرين السّادس :

نعتبر النّقط $A(-1;1)$، $B(-2;-4)$ و $C(-6;2)$. و المستقيم (Δ) المعرّف بالمعادلة المختصرة التّاليّة :
$(\Delta) : y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

1) بيّن أنّ المستقيم (Δ) يمرّ من النّقطتين A و C.

2) أ) حدّد المعادلة المختصرة للمسقيم (AB).

ب) استنتج أنّ المثلّث ABC مثلّث قائم الزّاويّة في النّقطة A.

3) أ) أحسب المسافتان AB و AC.

ب) استنتج مساحة المثلّث ABC.

4) أنشئ الشّكل.

حلّ :

1) نذكّر أنّ كلّ نقطة تنتمي لمستقيم ما، يجب أن تحقّق معادلته المختزلة.

- بالنّسبة للنّقطة A :

لدينا : $-\frac{1}{5}x_A + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5} \times (-1) + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$

إذن : $y_A = -\frac{1}{5}x_A + \frac{4}{5}$

و بالتّالي المستقيم (Δ) يمرّ من النّقطة A.

- بالنّسبة للنّقطة C :

لدينا : $-\frac{1}{5}x_c+\frac{4}{5}=-\frac{1}{5}\times(-6)+\frac{4}{5}=\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=\frac{10}{5}=2$

إذن : $y_C=-\frac{1}{5}x_C+\frac{4}{5}$

و بالتّالي المستقيم (Δ) يمرّ من النّقطة C.

2) أ) ليكن : $(AB): y=mx+p$

- لنحدّد العدد m، ميل المستقيم (AB) :

المستقيم (AB) يمرّ من النّقطتين A و B

إذن : $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-(-4)}{-1-(-2)}=\frac{1+4}{-1+2}=\frac{5}{1}=5$

و بالتّالي : $(AB): y=5x+p$.

- لنحدّد العدد p، الأرتوب عند الأصل :

المستقيم (AB) يمرّ من النقطة A

إذن : $y_A=5x_A+p$

أي : $1=5\times(-1)+p$

يعني : $1=-5+p$

و منه فإنّ : $p=1+5=6$

و بالتّالي المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)، هي : $(AB): y=5x+6$.

ب) لدينا : $(\Delta): y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$ و $(AB): y=5x+6$

إذن : ميل (Δ) هو $-\frac{1}{5}$، و ميل (AB) هو 5

و بالتّالي جداء ميلي (Δ) و (AB)، هو : $5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=-1$

و منه فإنّ : $(AB)\perp(\Delta)$.

و بما أن A و C تنتميان للمستقيم (Δ)

فإن : $(AB)\perp(AC)$

و بالتّالي : ABC مثلث قائم الزّاويّة في A.

3) أ) - بالنّسبة للمسافة AB :

لدينا : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

إذن : $AB=\sqrt{(-2-(-1))^2+(-4-1)^2}$

أي : $AB=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}$

و بالتّالي : $AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$.

- بالنّسبة للمسافة AC :

لدينا : $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$

إذن : $AC=\sqrt{(-6-(-1))^2+(2-1)^2}$

أي : $AC=\sqrt{(-5)^2+(1)^2}$

و بالتّالي : $AC=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$.

ب) ABC مثلث قائم الزّاويّة في A

إذن مساحته هي : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}$

إذن : $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{26} \times \sqrt{26}}{2}$

و بالتّالي : $S_{ABC} = \dfrac{26}{2} = 13$.

4) إنشاء الشّكل :